Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

02.03.2002.

Трећи разред – А категорија

1. У оштроуглом неједнакокраком троуглу ABC уочена је тачка T из које се свака страница тог троугла види под углом од 120° (*Торичелијева тачка троугла*). Нека су A_1, B_1 и C_1 подножја нормала из тачке T на странице троугла, и k кружница описана око $\triangle A_1B_1C_1$. Ако су A_2, B_2 и C_2 пресечне тачке кружнице k са страницама троугла ABC различите од тачака A_1, B_1, C_1, доказати да је $\triangle A_2B_2C_2$ једнакостраничан.

2. Одредити све парове (m, n) целих бројева тако да важи једнакост

$$(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n.$$

3. Нека су $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарни вектори у $\mathbb{R}^3$, и α, β, γ реални бројеви. Доказати да су вектори

$$\beta\vec{c} - \gamma\vec{b}, \quad \gamma\vec{a} - \alpha\vec{c}, \quad \alpha\vec{b} - \beta\vec{a}$$

компланарни.

4. Одредити све просте бројеве $p_1, p_2, \ldots, p_8$ за које важи

$$p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_8^2 + 992 = 4p_1p_2\cdots p_8.$$

5. Дат је полином $P(x)$ чији је слободни члан различит од нуле. Ако за сваки реалан број x важи

$$P(x)P(2x^2) = P(2x^3 + x),$$

доказати да $P(x)$ нема ниједну нулу у скупу реалних бројева.

Време за рад 180 минута.