

Друштво математичара Србије  
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

02.03.2002.

Други разред – А категорија

1. У оштроуглом троуглу  $ABC$ ,  $B'$  и  $C'$  су подножја висина из темена  $B$  и  $C$  редом. Кружница са пречником  $AB$  сече праву  $CC'$  у тачкама  $M$  и  $N$ , а кружница са пречником  $AC$  сече праву  $BB'$  у  $P$  и  $Q$ . Доказати да је четвороугао  $MPNQ$  тетиван.

2. Нека су  $\alpha$  и  $\beta$  два угла неког троугла. Доказати неједнакост

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha \sin \beta} \geq \operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

3. Дат је квадар са ивицама  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $x < y < z$ . Нека је  $p$  збир дужина свих његових ивица,  $S$  његова површина, и  $d$  дужина дијагонале квадра. Доказати да важи

$$x < \frac{1}{3} \left( \frac{1}{4}p - \sqrt{d^2 - \frac{1}{2}S} \right) \quad \text{и} \quad z > \frac{1}{3} \left( \frac{1}{4}p + \sqrt{d^2 - \frac{1}{2}S} \right).$$

4. Дужине страница троугла су природни бројеви, а полупречник описаног круга једнак је 6,25. Одредити странице тог троугла.
5. На шаховском турниру учествовало је 8 такмичара. Сваки од њих је одиграо по једну партију са сваким од преосталих учесника. На крају турнира сви шахисти су имали различит број поена, а другопласирани је освојио онолико поена колико четворица последњих заједно. Како се завршила партија између играча који су заузели четврто и шесто место? (У шаху, за победу играч добија 1 поен, за пораз 0, а у случају ремија оба играча добијају по 1/2 поена.)

Време за рад 180 минута.