

Друштво математичара Србије
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

02.03.2002.

Први разред – А категорија

1. Ако је n природан број, доказати да је $(n+1)^{3n} - n^{2n}(n+3)^n$ дељиво са $3n+1$.
2. Доказати да је број $\sqrt{1 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{n}}}$ ирационалан за сваки природан број $n \geq 2$.
3. У петоуглу $ABCDE$ све странице су међусобно подударне и $\sphericalangle BAE = 2\sphericalangle CAD$. Израчунати $\sphericalangle BAE$.
4. Над страницама конвексног четвороугла као над пречницима конструисана су четири круга. Доказати да ти кругови прекривају четвороугао.
5. На одбојкашком турниру учествовало је 10 екипа. Свака од њих је одиграла по једну утакмицу са сваком од преосталих екипа. На крају турнира прва екипа је имала x_1 победа и y_1 пораза, друга x_2 победа и y_2 пораза, ..., десета је имала x_{10} победа и y_{10} пораза. Доказати да је

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{10}^2.$$

(У одбојци нема нерешеног резултата - свака утакмица се завршава победом једне од екипа.)

Време за рад 180 минута.