

Друштво математичара Србије
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

02.03.2002.

Четврти разред – Б категорија

1. У равни су дати кругови $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$, $k_3(O_3, r_3)$ тако да сваки од њих споља додирује преостала два. Израчунати полупречник круга описаног око троугла $O_1O_2O_3$.

2. Дати су реални бројеви m и n , $mn < 0$, $m + n \neq 0$ и функције

$$y = m \cdot 3^x + n \quad \text{и} \quad y = n \cdot 3^{-x} + m.$$

Доказати да се графици ових двеју функција секу у двама тачкама, од којих је једна на апсцисној, а друга на ординатној оси.

3. Дати су реални бројеви a, b, c, d , $a \neq 0$, и једначина $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Ако је λi ($\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$) решење те једначине, доказати да је $ad = bc$ и $ac > 0$.
(i је имагинарна јединица: $i^2 = -1$.)

4. Човек се налази у чамцу на левој обали канала широког 3 km . Жели да стигне до куће на десној обали канала која је од њега удаљена 5 km ваздушном линијом. Он ће довести до неког места на другој обали брзином од 6 km/h , а затим наставити до куће трчећи брзином од 8 km/h . Одредити растојање куће и места до ког треба човек да доведе да би стигао кући за најкраће могуће време. (Претпоставља се да вода у каналу мирује.)

5. Дат је број $z \in \mathbb{C}$. Ако је $|z| = 1$ и $z \neq 1$, доказати да је

$$\operatorname{Re} \left(\frac{z+1}{z-1} \right) = 0.$$

Време за рад 180 минута.