

Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.03.2001.

Први разред – Б категорија

1. Ако је

$$x = \frac{b}{c} + \frac{c}{b}, \quad y = \frac{a}{c} + \frac{c}{a}, \quad z = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \quad (abc \neq 0),$$

доказати да вредност израза $x^2 + y^2 + z^2 - xyz$ не зависи од a, b, c .

2. Круг уписан у троугао ABC додирује странице BC и BA редом у тачкама M и N . Ако је K пресечна тачка симетрале угла BAC са правом MN , израчунати угао AKC .
3. Домаћица је направила торту округлог облика, али не зна тачна колико ће имати гостију - троје или четворо. Који је најмањи број праволинијских резова торте које она треба да направи пре него што дођу гости, тако да у сваком случају, без допунских резова, сваки гост може да добије једнаку количину торте?
4. Производ природних бројева x и y је троцифрен број са једнаким цифрама, а њихов збир је двоцифрен, такође са једнаким цифрама. Наћи све такве бројеве x и y .
5. Дат је скуп \mathcal{A} од 2000 тачака у равни тако да међу њима не постоје три колинеарне. Доказати да се ове тачке могу спојити са 1000 плавих, 1000 првених и 1000 жутих дужи тако да важи:
- (1) свака тачка скupa \mathcal{A} спојена је са тачно три друге тачке скупа \mathcal{A} ;
 - (2) из сваке тачке скупа \mathcal{A} полазе дужи три различите боје;
 - (3) дужи различитих боја немају заједничких унутрашњих тачака.

Време за рад 240 минута.