

Друштво математичара Србије
РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.03.2001.

Четврти разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned}x + y + z &= \frac{7}{2} \\x^2 + y^2 + z^2 &= \frac{41}{4} \\x^2y^2z + xy^2z^2 + x^2yz^2 &= -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

2. Дат је природан број a и аритметички низ $a, 3a, 5a, 7a, \dots$. Чланови тог низа груписани су на следећи начин: прву групу чине првих a чланова, другу следећих $2a$ чланова, трећу следећих $3a$ чланова, итд. Доказати да је збир елемената у свакој групи једнак кубу броја елемената те групе.
3. Доказати да је мерни број површине нормалне пројекције јединичне коцке на произвољну раван α једнак мерном броју дужине нормалне пројекције те коцке на праву n нормалну на α .
4. Дата је функција $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ таква да је $f(f(m) + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$ за све природне бројеве m и n . Ако је $f(1) = 29$ и $f(29) = 58$, израчунати $f(2001)$.
5. Дата је реална функција $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, где су a, b, c, d дати реални бројеви, $ad - bc \neq 0$. Доказати да је ова функција једнака својој инверзној функцији ако и само ако важи $a + d = 0$.

Време за рад 240 минута.