Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.03.2001.

Четврти разред – А категорија

1. Колико има функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таквих да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $f(n) > 1$ и $f(n+3)f(n+2) = f(n+1) + f(n) + 36$?

2. Ако су a, b и c дужине страница, P површина и s полуобим неког троугла, доказати да важи неједнакост

$$3^{500} \cdot (a^{2001} + b^{2001} + c^{2001}) \geqslant 2^{2001} \cdot P^{1000} \cdot s.$$

3. Доказати да је мерни број површине нормалне пројекције јединичне коцке на произвољну раван α једнак мерном броју дужине нормалне пројекције те коцке на праву n нормалну на α.

4. У кутији се налазе 4 куглице нумерисане бројевима $1, 2, 3, 4$. Два играча играју игру у којој наизменично бирају са враћањем једну куглицу из кутије. Избори су међусобно независни, а свака куглица има вероватноћу $\frac{1}{4}$ да буде изабрана у сваком кораку. Игра се завршава у тренутку када је збир свих до тада изабраних бројева дељив са 3, победом играча који је последњи бирао куглицу. Одредити вероватноћу догађаја да се игра заврши победом играча који је први бирао куглицу.

5. Дати су реални бројеви x и r, $|r| \leqslant \frac{1}{2}$. Низ (s_n) задат је са

$$s_1 = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad s_n = s_{n-1} + r^{n-1}\cos(2^{n-2}x), \quad n \geqslant 2.$$

Доказати да су сви чланови тог низа ненегативни.

Време за рад 240 минута.