

Друштво математичара Србије
РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.03.2001.

Други разред – Б категорија

1. Одредити скуп свих реалних вредности параметра a за које неједначина

$$x^2 - a(a+1)x + a^3 \leq 0$$

има тачно пет целобројних решења.

2. У равни су дати кругови k_1 и k_2 са центрима O_1 и O_2 . Полуправе O_1a и O_1b додирују круг k_2 и секу k_1 у тачкама A и B , а полуправе O_2c и O_2d додирују k_1 и секу k_2 у тачкама C и D . Доказати да је $AB = CD$.

3. Нека су a, b, c позитивни бројеви такви да је $a > c$ и $b > c$. Доказати:

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}.$$

4. Одредити све вредности реалног параметра a тако да једначина

$$4^x - (a+3)2^x + 4a - 4 = 0$$

има тачно једно реално решење.

5. Да ли је број

$$\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{9\sqrt{8} + 8\sqrt{9}}$$

рационалан или ирационалан? Одговор образложити.

Време за рад 240 минута.