

Друштво математичара Србије
РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.03.2001.

Трећи разред – А категорија

1. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned}y^3 - 9x^2 + 27x - 27 &= 0 \\z^3 - 9y^2 + 27y - 27 &= 0 \\x^3 - 9z^2 + 27z - 27 &= 0.\end{aligned}$$

2. Ако су a , b и c дужине страница, P површина и s полуобим неког троугла, доказати да важи неједнакост

$$3^{500} \cdot (a^{2001} + b^{2001} + c^{2001}) \geq 2^{2001} \cdot P^{1000} \cdot s.$$

3. Доказати да је мерни број површине нормалне пројекције јединичне коцке на произвољну раван α једнак мерном броју дужине нормалне пројекције те коцке на праву n нормалну на α .
4. На табли је написан природан број a . Дозвољено је додати том броју неки његов делилац различит од тог броја и јединице. На добијени број дозвољено је применити исту процедуру, итд. Одредити све бројеве који се на тај начин могу добити полазећи од броја $a = 4$.
5. Наћи све функције $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ такве да је $2f(x) = f(x - y) + f(x + y)$ за све $x, y \in \mathbb{Q}$.

Време за рад 240 минута.