

Друштво математичара Србије
РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.03.2001.

Први разред – А категорија

1. Да ли се првих сто природних бројева могу поделити у три групе, тако да је збир бројева прве дељив са 102, збир бројева друге дељив са 203, и збир бројева треће дељив са 304?
2. Дат је оштроугли троугао ABC . Нека је BK ($K \in AC$) симетрала његовог унутрашњег угла у темену B , CD висина, $N \in CD$ тачка таква да је $KN \perp BC$, и $M = BK \cap CD$. Ако је P пресечна тачка круга описаног око троугла BKN и праве AB , $P \neq B$, доказати да је $PK = PM$.
3. Нека су a, b, c позитивни бројеви такви да је $a > c$ и $b > c$. Доказати:

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}.$$

4. Дат је круг k полупречника 31m и изломљена линија ℓ дужине 61m којој се обе крајње тачке налазе на том кругу. Доказати да постоји права p која садржи центар круга k таква да се све тачке изломљене линије ℓ налазе са исте стране праве p .
5. Дат је скуп \mathcal{A} од 2000 тачака у равни тако да међу њима не постоје три колинеарне. Доказати да се ове тачке могу спојити са 1000 плавих, 1000 црвених и 1000 жутих дужи тако да важи:
 - (1) свака тачка скупа \mathcal{A} спојена је са тачно три друге тачке скупа \mathcal{A} ;
 - (2) из сваке тачке скупа \mathcal{A} полазе дужи три различите боје;
 - (3) дужи различитих боја немају заједничких унутрашњих тачака.

Време за рад 240 минута.