**Друштво математичара Србије**

**ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ**

**24.02.2001.**

**Трећи разред – Б категорија**

**1.** Ако су $x$, $y$ и $z$ реални бројеви такви да је $\sin x + \sin y + \sin z \geqslant 2$, онда је $\cos x + \cos y + \cos z \leqslant \sqrt{5}$. Доказати.

**2.** Нека су $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ четири јединична вектора за које важи $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=0$. Израчунати вредност израза $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}+\vec{c}\cdot\vec{d}$.

**3.** На страницама $AB$, $AC$, $BC$ једнакостраничног троугла $ABC$ дате су редом тачке $C_1$, $B_1$, $A_1$ такве да је $AC_1 = BA_1 = CB_1 = AB/3$. У ком односу стоје површине троугла $ABC$ и троугла који граде праве $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$?

**4.** У скупу реалних бројева решити једначину

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)(x-1)^{\frac{1}{2}(\log_2(x-1)^2)^2-7}=\left(\frac{x-1}{4}\right)^6.$$

**5.** Нека је $S=\{r_1^4+r_2^4+\cdots+r_{15}^4 \mid r_1,r_2,\ldots,r_{15}\in\mathbb{Z}\}$. Доказати да је скуп $\mathbb{N}\setminus S$ бесконачан.

Време за рад 180 минута.