Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2001.

Трећи разред – А категорија

1. Ако је $1 < x < y < z$, доказати да је

$$\log_x(\log_x y) + \log_y(\log_y z) + \log_z(\log_z x) > 0.$$

2. Низ реалних бројева (x_n) задат је са

$$x_1 = a > 0, \quad x_2 = b > 0, \quad x_n = \frac{1 + x_{n-1}}{x_{n-2}} \text{ за } n \geqslant 3.$$

Израчунати x_{2001} у функцији од a и b.

3. Дата је раван α, и тачке A и B ван ње које се налазе са исте стране те равни. Посматрајмо кружнице које садрже тачке A и B и додирују α. Одредити геометријско место додирних тачака свих таквих кружница са равни α.

4. У равни су дати правоугаоници $ABCD$ и $CEFG$ такви да је $AB = CE$, $BC = EF$, $D - C - E$ и $B - C - G$, са истакнутим дијагоналама AC и EG. Дозвољено је правоугаоник $ABCD$ пресликати симетрично у односу на неку од његових страница, на тако добијени правоугаоник применити исту операцију, итд. Да ли је могуће, применом неколико таквих пресликавања, тај правоугаоник довести до поклапања са $CEFG$, тако да им се и истакнуте дијагонале поклопе?

5. Нека је $S = \{r_1^4 + r_2^4 + \cdots + r_{15}^4 \mid r_1, r_2, \ldots, r_{15} \in \mathbb{Z}\}$. Доказати да је скуп $\mathbb{N} \setminus S$ бесконачан.

Време за рад 180 минута.