Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2001.

Други разред – А категорија

1. Ако су x, y и z реални бројеви такви да је $\sin x + \sin y + \sin z \geqslant 2$, онда је $\cos x + \cos y + \cos z \leqslant \sqrt{5}$. Доказати.

2. Наћи све реалне бројеве a за које постоје реални бројеви x и y тако да важи
$$x^2 + 2xy - 7y^2 \geqslant \frac{1-a}{a+1} \quad \text{и} \quad 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leqslant -2.$$

3. Решити неједначину
$$(2001^x)^{1-2001^x} + (2001^{2x})^{1-2001^{2x}} + \cdots + (2001^{2001x})^{1-2001^{2001x}} \geqslant 2001$$
у скупу ненегативних реалних бројева.

4. У равни су дати једнако оријентисани квадрати $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$. Доказати да су средишта дужи A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 темена квадрата.

5. Фигуру у равни коју чини низ од четири различита квадрата странице 1, тако да узастопни квадрати у низу имају заједничку страницу, а они који нису узастопни су дисјунктни или имају заједничко теме, зваћемо *змијица*. Квадратна табла 4×4 прекривена је са четири змијице: црвеном, жутом, плавом и зеленом, које се не преклапају. Доказати да постоји бар једна врста, колона или дијагонала квадратне табле чија су поља обојена са четири различите боје.

Време за рад 180 минута.