Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2000.

Четврти разред – А категорија

1. Дати су природни бројеви q, n и r, $r \leqslant n$. Доказати да $r!$ дели број

$$(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{r-1}).$$

2. За какве $a, b \in \mathbb{R}$ систем једначина

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = a \\ \sin x + \sin y = b \end{cases}$$

има решења?

3. Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост $\left\{n\sqrt{2}\right\} > \dfrac{1}{2n\sqrt{2}}$.
(Са $\{\alpha\}$ је означен разломљени део броја α, тј. $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$, где је $[\alpha]$ највећи цео број који није већи од α.)

4. Под *одстојањем тачке M од фигуре* Φ подразумева се најмање од растојања MN, где је $N \in \Phi$. Ако је дат троугао ABC, доказати да је скуп тачака равни које су ближе тачки A него затвореној дужи BC, у односу на горе дефинисано одстојање, конвексан.

5. Описати све непразне коначне подскупове S интервала $[0, \infty]$ такве да за свака два (не обавезно различита) елемента $x, y \in S$ важи $x + y \in S$ или $|x - y| \in S$.

Време за рад 240 минута.