

Друштво математичара Србије
РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2000.

Трећи разред – Б категорија

1. Да ли постоје четири тачке A, B, C, D у простору тако да важи $AB = CD = BD = 4$, $AC = 3$, $BC = AD = 5$?
2. У троуглу ABC са оштрим углом код темена C , над средњом линијом DE паралелном AB као пречником конструисан је круг који сече странице AC и BC , редом, у тачкама M и N . Изразити дужину дужи MN преко $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$.
3. Доказати да растојања произвољне тачке круга описаног око квадрата до четири темена тог квадрата не могу сва бити рационални бројеви.
4. Ако су x, y, z позитивни реални бројеви различити од 3 и ако је

$$y = 3^{\frac{1}{1-\log_3 x}} \quad \text{и} \quad z = 3^{\frac{1}{1-\log_3 y}},$$

доказати да је $x = 3^{\frac{1}{1-\log_3 z}}$.

5. Наћи максималну вредност детерминанте трећег реда у којој су тачно два елемента једнака 4, а остали су из скупа $\{1, -1\}$.

Време за рад 240 минута.