

Друштво математичара Србије
РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2000.

Трећи разред – А категорија

1. Дати су природни бројеви q , n и r , $r \leq n$. Доказати да $r!$ дели број

$$(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{r-1}).$$

2. За какве $a, b \in \mathbb{R}$ систем једначина

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = a \\ \sin x + \sin y = b \end{cases}$$

има решења?

3. Дата је коцка $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Израчунати угао између равни $AB_1 C_1$ и $A_1 B_1 C$.

4. Нека је k природан број већи од 1. Низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ задат је са

$$x_1 = 1, \quad x_2 = k, \quad x_n = kx_{n-1} - x_{n-2}.$$

Доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји $m > n$ тако да су $x_m - 1$ и x_n узајамно прости.

5. Наћи максималну вредност детерминанте трећег реда у којој су тачно два елемента једнака 4, а остали су из скупа $\{1, -1\}$.

Време за рад 240 минута.