

Друштво математичара Србије
РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2000.

Други разред – А категорија

1. Дат је троугао ABC . Тачка D се налази на полуправој BA тако да је $BD = BA + AC$, док тачке K и M припадају страницама BA и BC , редом, тако да троуглови BDM и BCK имају једнаке површине. Ако је $\sphericalangle BAC = \alpha$, одредити $\sphericalangle BKM$.

2. Доказати да за позитивне реалне бројеве a_1, a_2, a_3, a_4 важи најједнакост

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3 + a_4} + \frac{a_2}{a_3 + a_4 + a_1} + \frac{a_3}{a_4 + a_1 + a_2} + \frac{a_4}{a_1 + a_2 + a_3} \geq \frac{4}{3}$$

и да једнакост важи ако и само ако је $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

3. Ако су a и b дати реални бројеви, наћи све парове (x, y) реалних бројева који задовољавају следећи систем једначина:

$$\begin{cases} x^3y + xy^3 = ax + by \\ 2x^2y^2 = bx + ay. \end{cases}$$

4. Колико има пермутација $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ таквих да за свако $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ важи $f(j) \leq j + 1$?
5. Дат је правоугли троугао ABC са правим углом код темена B . Трисектрисе угла (полуправе које га деле на три подударна угла) код темена A деле наспрамну катету BC на три дужи, од којих је најдужа двоструко дужа од најкраће. Одредити углове троугла ABC .

Време за рад 240 минута.