Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2000.

Први разред – А категорија

1. Нека је $ABCD$ паралелограм у коме је $\sphericalangle A < 90^\circ$. Ако је E тачка у равни таква да је $EA \perp AB$ и $EC \perp CB$, доказати да су углови AED и CEB подударни.

2. Дат је оштроугли троугао ABC. Конструисати (лењиром и шестаром) унутар овог троугла тачку P такву да пресеци полуправих AP, BP и CP са описаним кругом око троугла ABC буду темена једнакостраничног троугла.

3. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ позитивни реални бројеви чији је збир 1. Ако је

$$S = \frac{a_1^2}{2a_1} + \frac{a_1a_2}{a_1+a_2} + \cdots + \frac{a_1a_n}{a_1+a_n} + \frac{a_2a_1}{a_2+a_1} + \frac{a_2^2}{2a_2} + \cdots + \frac{a_2a_n}{a_2+a_n} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{a_na_1}{a_n+a_1} + \frac{a_na_2}{a_n+a_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{2a_n}$$

(S је збир свих израза облика $\dfrac{a_ia_j}{a_i+a_j}$ за $1 \leqslant i, j \leqslant n$), доказати да је $S \leqslant \frac{n}{2}$.

4. На острву има 45 камелеона: 17 жутих, 15 сивих и 13 плавих. Они лутају острвом сусрећући се повремено. При сваком сусрету присутна су само два камелеона. Ако се сретну два камепелона исте боје, њихова боја остане непромењена. Ако се сретну два камелеона различите боје, оба мењају боју у трећу (нпр. ако се сретну жути и сиви камелеон, оба мењају боју у плаво). Може ли се десити да од једног момента (па надаље) сви камелеони на острву имају исту боју?

5. Нека су a, b, c, d, x, y позитивни реални бројеви за које је

$$a + 2ay + y = b + 2bx + x \quad \text{и} \quad x + 2xd + d = y + 2yc + c.$$

Доказати да важи $a + 2ad + d = b + 2bc + c$.

Време за рад 240 минута.