

Друштво математичара Србије
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.02.2000.

Први разред – Б категорија

1. Миљан и Младен играју следећу игру: наизменично бирају делиоце броја 1000, али тако да број који изаберу не дели ниједан од већ претходно изабраних бројева. Игру губи онај играч који каже број 1000. Миљан почиње игру. Како треба да игра да би победио Младена?

2. Колико има парова (m, n) целих бројева за које важи

$$m^3 + 6m^2 + 5m = 8n^3 + 36n^2 + 40n + 8?$$

3. На страницама AB, BC, CA једнакокраког правоуглог троугла ($\sphericalangle C = 90^\circ$) дате су, редом, тачке R, S, T тако да важи $AR : RB = BS : SC = CT : TA = 1 : 2$. Доказати да је троугао RST једнакокрак.

4. У равни је дато n тачака. Из сваке тачке полази по 2000 вектора до осталих тачака и у свакој тачки завршава 2000 вектора из осталих тачака. Доказати да је збир свих ових вектора једнак нули.

5. Доказати да не постоје реални бројеви x_1, x_2, \dots, x_{18} тако да је $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{18} \leq 2000$ и да никоја три узастопна броја нису дужине страница неког троугла.

Време за рад 180 минута.