Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.02.2000.

Четврти разред – Б категорија

1. Нека су на полукругу полупречника 1 редом распоређене тачке A, B, C, D, E, при чему су A и E крајеви пречника. Доказати да важи:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2 + AB \cdot BC \cdot CD + BC \cdot CD \cdot DE < 4.$$

2. Наћи све целе бројеве x, y такве да важи $\sin^3 \dfrac{(x^2+y^2)\pi}{2} + 1 = 0.$

3. Наћи све реалне бројеве a, b, c, d тако да важи:

$$\begin{aligned} abc + ab + bc + ca + a + b + c &= 2, \\ bcd + bc + cd + db + b + c + d &= 5, \\ cda + cd + da + ac + c + d + a &= 7, \\ dab + da + ab + bd + d + a + b &= 11. \end{aligned}$$

4. За какве реалне бројеве x и α је задовољена неједнакост

$$\log_2 x + \log_x 2 + 2\cos\alpha \leqslant 0?$$

5. Доказати да за сваки природан број $n > 2$ важи $\sqrt[n]{n!} > \sqrt{n}$.

Време за рад 180 минута.