Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.02.2000.

Четврти разред – А категорија

1. Сфера S полупречника r садржи центар O сфере Σ полупречника R, при чему је $R > 2r$. Тетива EF сфере Σ је уједно тангента сфере S у тачки T. Доказати неједнакост $ET^2 + TF^2 \leqslant 2R^2 + r^2$.

2. Ако су m и n природни бројеви, доказати неједнакост:

$$\frac{1}{\sqrt[m]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m+1}} \geqslant 1.$$

3. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ дати реални бројеви ($n \geqslant 2$). Доказати да једначина

$$x^n + a_1x^{n-1} - a_2x^{n-2} - a_3x^{n-3} - \cdots - a_n = 0$$

има тачно једно позитивно реално решење.

4. Познато је да је $10001 = 137 \cdot 73$ сложен број. Проверити да ли су и сви бројеви 100010001, 1000100010001, 10001000100010001, ... сложени.

5. Ако за реалан број a различит од $0, 1, -1$ и целе бројеве m, n, p, q важи

$$a^m + a^n = a^p + a^q \quad \text{и} \quad a^{3m} + a^{3n} = a^{3p} + a^{3q},$$

тада је $m = p$, $n = q$ или $m = q$, $n = p$. Доказати.

Време за рад 180 минута.