

Друштво математичара Србије
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.02.2000.

Трећи разред – А категорија

1. У биолошкој лабораторији посматра се утицај једне врсте вируса на неке бактерије. Познато је да се сваке секунде дешава следећи процес: вируси нападају сваки по јдну бактерију и усмрћују је, при чему од сваког вируса настају два, док се свака ненападнута бактерија подели на две нове бактерије. Ако је у посуду са 2000 бактерија тачно у подне додат један вирус, одредити тренутак када ће све бактерије изумрети.
2. Доказати да је запремина правилне пирамиде мања од куба њене бочне ивице.
3. Коју највећу, а коју најмању вредност може да има производ $\cos x \cos y$, ако је познато да је $\sin x \sin y = b$, где је b дати реалан број ($|b| \leq 1$)?
4. Познато је да је $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ и да је $1^3 + 5^3 + 7^3 + 12^3 = 13^3$. Доказати да за сваки природан број $n \geq 3$ постоје природни бројеви a_1, a_2, \dots, a_n, b такви да важи
$$a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = b^3.$$
5. Ако се у оштроуглом троуглу ABC бисектриса унутрашњег угла код темена A , тежишна дуж из темена B и висина из темена C секу у једној тачки, доказати да важи $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \gamma}{\cos \beta}$ (α, β и γ су унутрашњи углови код темена A, B и C , редом).

Време за рад 180 минута.