Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Чачак, 20.03.1999.

Други разред – А категорија

1. Ако су AA_1, BB_1 и CC_1 висине оштроуглог троугла ABC, а A_2, B_2, C_2 редом тачке у којима праве AA_1, BB_1, CC_1 секу круг описан око троугла ABC, доказати да је
$$\frac{AA_2}{AA_1}+\frac{BB_2}{BB_1}+\frac{CC_2}{CC_1}=4.$$

2. Нека су $a \geqslant b \geqslant c > 0$ реални бројеви такви да је $\sqrt{3a(b-c)}-\sqrt{c(a-b)}=0$. Ако су x, y, z, p реални бројеви, одредити ком од скупова $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ или $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ припада вредност израза
$$\begin{aligned} f(x,y,z,p) = \; & \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}p-i\sqrt{3}\right)\left(-\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}z-iy\right)+ \\ & +\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)(2+ip)\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y-iz\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{y}{2}-ix\right)\right]. \end{aligned}$$

3. На табли је написан израз $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Два ученика играју следећу игру: први избрише произвољан од параметара a, b и c и замени га неким реалним бројем. Затим други то исто уради са неким од преосталих параметара. На крају први замени последњи параметар реалним бројем. Ако добијени полином нема позитивних корена, онда је победио ученик који први игра. У супротном игру добија други ученик. Који од ученика може да победи и како треба да игра?

4. Нека су f и g различити квадратни триноми са најстаријим коефицијентом 1. Ако је $f(20)+f(3)+f(1999)=g(20)+g(3)+g(1999)$, наћи све $x\in\mathbb{R}$ за које је $f(x)=g(x)$.

5. Математичар се изгубио у шуми коју покрива област облика бесконачне траке ширине 1km. Доказати да математичар може изабрати такав начин кретања који ће га извести из шуме после највише $2\sqrt{2}$km пређеног пута.

Време за рад 240 минута.