

Друштво математичара Србије
РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Чачак, 20.03.1999.

Први разред – А категорија

1. Дат је конвексан шестоугао $ABCDEF$. Свака од дијагонала AD и BE дели шестоугао на два дела једнаких површина. Доказати да је четвороугао $BDEA$ трапез.
2. Дат је скуп $A \subset \{1, 2, \dots, 100\}$ који садржи 10 елемената. Доказати да постоје два дисјунктна и непразна подскупа S и T скупа A таква да је збир елемената скупа S једнак збиру елемената скупа T .
3. Нека је m дати цео број. Доказати да постоји бар један пар (x, y) целих бројева такав да важи:

$$2x^2 + 11xy + 12y^2 + 4x + 5y + 6 = 2m.$$

4. У равни су дате кружнице $k_1, k_2, \dots, k_{1999}$. Кружнице k_1 и k_2 се споља додирују у тачки A_1 , кружнице k_2 и k_3 у тачки A_2 , итд, k_{1999} и k_1 у тачки A_{1999} . Нека је $M_1 \in k_1$ произвољна тачка, M_2 пресечна тачка праве A_1M_1 и кружнице k_2 , M_3 пресечна тачка праве A_2M_2 и k_3 , итд, и M_{2000} пресечна тачка праве $A_{1999}M_{1999}$ и k_1 . Доказати да су тачке M_1 и M_{2000} дијаметрално супротне на k_1 .
5. Природан број $n \geq 2$ дели се редом свим природним бројевима који су од њега мањи и записују се сви добијени остаци. Наћи све n за које је збир свих различитих остатака једнак n .

Време за рад 240 минута.