Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.02.1999.

Трећи разред – А категорија

1. Нека су Ox, Oy, Oz три полуправе у простору са заједничком почетном тачком O. Ако за било који избор тачака A, B, C различитих од O, редом са полуправих Ox, Oy, Oz, важи да је троугао ABC оштроугли, доказати да су полуправе међусобно нормалне.

2. Решити неједначину:

$$1 \leqslant |\cos x|^{\sqrt{2x-3}\cdot\log_{|\cos x|}\left(\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)}\right)}.$$

3. Нека је P полином четвртог степена такав да је $P(1) = P(-1)$ и $P(2) = P(-2)$. Доказати да је тада $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ парна функција, тј. да важи $P(x) = P(-x)$ за свако $x \in \mathbb{R}$.

4. Дати су позитивни бројеви $x_1, \dots, x_n$ који чине аритметичку прогресију са разликом d. Доказати да је

$$\begin{aligned} S = \ & \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} + \frac{d}{x_1x_2} + \frac{d}{x_1x_3} + \cdots + \frac{d}{x_{n-1}x_n} + \\ & + \frac{d^2}{x_1x_2x_3} + \cdots + \frac{d^2}{x_{n-2}x_{n-1}x_n} + \cdots + \frac{d^{n-1}}{x_1x_2\cdots x_n} \quad = \frac{n}{x_1}\,, \end{aligned}$$

где су узети сви могући производи елемената $x_1, \dots, x_n$.

5. Дат је троугао ABC са страницама $a > b > c$ и произвољна тачка O у унутрашњости тог троугла. Нека праве AO, BO, CO секу странице троугла ABC у тачкама P, Q и R. Доказати да је $OP + OQ + OR < a$.

Време за рад 180 минута.