Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

10. фебруар 2024.

Први разред - Б категорија

1. Колико се највише краљева може поставити на класичну шаховску таблу тако да се они међусобно не нападају (сваки краљ напада неког другог краља у складу са познатим шаховским правилима)?

2. Младен, Иван и Растко су другари који често заједно иду на пијацу. Зна се да свако од њих на пијаци купује увек исто воће и то купине или малине (само једно воће од набројаних). С тим у вези, ко од њих шта купује, познати су следећи искази:

1° Ако Младен купује малине, онда Растко купује исто воће као и Иван.

2° Ако Растко купује малине, онда Иван купује другачије воће од Младена.

3° Ако Иван купује купине, онда Младен купује исто воће као и Иван.

Да ли су ове изјаве непротивречне?

За кога од њих можемо са сигурношћу да тврдимо шта купује?

3. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла ABC, $AB > AC$, и нека је дуж AD висина из темена A тог троугла. Означимо са E тачку праве BC, $E \neq C$, за коју је $DE = DC$. Претпоставимо да се праве AE и BH секу у тачки S. Ако је тачка N средиште дужи AE, а тачка M средиште дужи BH, доказати да је права MN нормална на праву DS.

4. Дата је функција $f : [0, 1) \to (0, 2]$, која је дефинисана захтевом:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{ако је } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 2x - 1, & \text{ако је } \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

(а) Решити неједначину $f(x) \geqslant \frac{3}{2}$.
(б) Одредити инверзну функцију дате функције.

5. Нека су $\overline{abc}$ и $\overline{def}$, $a \cdot c \cdot d \cdot f \neq 0$, троцифрени бројеви за које важи $\overline{abc} + \overline{cba} = \overline{def} + \overline{fed}$. Доказати да бројеви $\overline{abc}$ и $\overline{def}$ имају исту цифру десетице.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.