

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

10. фебруар 2024.

Четврти разред - Б категорија

1. Познато је да решења једначине $9x^3 - 63x^2 + 122x - 56 = 0$ чине аритметичку прогресију. Наћи та решења.

2. У троуглу ABC , са угловима α, β и γ у теменима A, B и C , редом, важи да је

$$\sin \alpha = 2023 \sin \beta \sin \gamma \quad \text{и} \quad \cos \alpha = 2023 \cos \beta \cos \gamma.$$

Одредити вредност израза

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^3 \alpha + \dots + \operatorname{tg}^{2023} \alpha}{\operatorname{tg}^{-1} \alpha + \operatorname{tg}^{-2} \alpha + \operatorname{tg}^{-3} \alpha + \dots + \operatorname{tg}^{-2023} \alpha}.$$

3. За датум у облику $X.Y.Z$. где је X дан, Y месец, а Z година, дефинишемо његову „запањеност“ као природан број \overline{XYZ} . Тако је на пример за датум 12.3.1845. његова запањеност 1231845. За датум кажемо да је запањујући ако су у његовој запањености све цифре на непарним позицијама, као и све цифре на парним позицијама, једнаке. Неки примери запањујућих датума су 12.12.1212. и 7.3.737. Колико је у Новој Ери, тј. почев од 1. јануара прве године Нове Ере) до данас, било запањујућих датума?

4. Тежиште троугла ABC је тачка T , а центар уписане кружнице тог троугла је тачка S . Ако је $AB = 25$, $ST = 3$ и $AB \parallel ST$, одредити дужине осталих страница троугла ABC .

5. Нека је \mathcal{P} скуп свих простих бројева. У скупу \mathcal{P} , по p, q и r , решити једначину

$$p^{q^r} + q^r + r = 2024.$$

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.