

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

10. фебруар 2024.

Четврти разред - А категорија

1. Нека је A укупан број могућих бојења свих темена правилног n -тоугла, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, у три различите боје, а B укупан број могућих бојења тих истих темена у четири различите боје, при чему су у другом случају суседна темена обојена различитим бојама. У зависности од n , размотрити који број, A или B , је већи и за колико (приликом бојења не морају све боје бити употребљене)?

2. Одредити све природне бројеве n такве да за свако $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ важи неједнакост

$$\frac{n \sin x + \operatorname{tg} x}{x} > n + 1.$$

3. На страницама DE и EF правилног шестоугла $ABCDEF$, редом, уочене су тачке X и Y . Нека је AXX' једнакостраничан троугао, при чему су тачке X' и E са супротних страна праве AX , а AYY' једнакостраничан троугао, при чему су тачке Y' и E са супротних страна праве AU . Ако је $X'Y' = 3AB$, доказати да је $EX = EY$.

4. Да ли постоји полином P са целобројним коефицијентима за који важи

$$-7 \leq P(-1) \leq -4 \quad \text{и} \quad P(2024) = P(20)^{24} + P(24)^{20}?$$

5. Одредити све реалне бројеве x за које постоји природан број n и коначан низ реалних бројева x_1, \dots, x_n , таквих да је $x_1 = x$, $x_{k+1} = \frac{x_k}{\{x_k\}}$, $1 \leq k \leq n-1$, при чему је $x_n \in \mathbb{Z}$ ($\{x\} = x - [x]$, где је $[x]$ највећи цео број не већи од x , $x \in \mathbb{R}$).

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.