

Министарство просвете Републике Србије  
Друштво математичара Србије  
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

10. фебруар 2024.

Други разред - Б категорија

1. За правоугаони сто са 30 столица (15 столица са једне ивице стола и наспрам њих још 15 столица) треба сместити 15 брачних парова (муж и жена чине брачну заједницу), тако да свака жена седи или поред или прекопута свог мужа. На колико начина је ово могуће учинити?
2. Ако су  $a, b$  и  $c$  реални бројеви такви да неједнакост  $ax^2 + bx + c > 0$  важи за свако  $x \in \mathbb{R}$ , доказати да тада за свако  $x \in \mathbb{R}$  важи и неједнакост  $cx^2 + bx + a \geq 0$ .
3. Нека је  $X$  средиште основице  $AB$  трапеза  $ABCD$ . Ако је  $\sphericalangle ADX = \sphericalangle BCX$ , доказати да су симетрале углова  $\sphericalangle ADX, \sphericalangle DXC$  и  $\sphericalangle XCB$  праве истог прамена, тј. да се све три секу у једној тачки или да су паралелне.
4. У оштроуглом троуглу  $ABC$ ,  $AB > AC$ , тачка  $D$  је пресечна тачка симетрале унутрашњег угла у темену  $A$  и странице  $BC$  тог троугла. Нека је тачка  $E$  подножје нормале из тачке  $D$  на праву  $AB$ . Ако је дуж  $CE$  тежишна дуж троугла  $ABC$ , доказати да је  $AF = \frac{AB-AC}{2}$ , при чему је  $F$  подножје висине из темена  $C$  троугла  $ABC$ .
5. Одредити онај природан број  $n$  за који важи да број  $2024^n$  има тачно 160 природних делилаца.

Време за рад 180 минута.  
Сваки задатак вреди 20 поена.  
Решења задатака детаљно образложити.