

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

10. фебруар 2024.

Трећи разред - Б категорија

1. У троуглу ABC , са угловима α, β и γ у теменима A, B и C , редом, важи да је

$$\sin \alpha = 2023 \sin \beta \sin \gamma \quad \text{и} \quad \cos \alpha = 2023 \cos \beta \cos \gamma.$$

Одредити вредност израза $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$.

2. Дат је конвексан и тетивни четвороугао $ABCD$. Нека је X пресек симетрала унутрашњих углова у теменима A и B тог четвороугла и нека је Y пресек симетрала унутрашњих углова у теменима C и D тог четвороугла. Доказати да тачке D, A, X и Y леже на једној кружности.

3. У једној европској школи од n ученика организована је журка. На журци се ученици друже и сваки ученик се спријатељио са пријатељима свог пријатеља. Пријатељство је узајамни другарски однос између две особе.

(а) Колико је минимално пријатељстава на почетку журке потребно тако да сви на крају провода буду пријатељи, односно, тако да су на крају журке, било које две случајно изабране особе, у пријатељском односу?

(б) Колико је максимално пријатељстава на почетку журке потребно тако да не буду сви на крају провода пријатељи, односно, тако да на крају журке постоје две особе које нису у пријатељском односу?

4. Дужине страница троугла су природни бројеви. Једна страница је дужине 13, а наспрам ње је угао 120° . Одредити површину тог троугла. Наћи сва решења.

5. Одредити последње две цифре броја $2^{3^{2024}}$.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.