

Министарство просвете Републике Србије  
Друштво математичара Србије  
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

10. фебруар 2024.

Трећи разред - А категорија

1. Нека је  $p$  прост број облика  $4k + 1$ , за неко  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ . Доказати да је

$$\tau((p-2)!!^2 + 1) \geq 8,$$

где је  $\tau(n)$  укупан број позитивних делилаца природног броја  $n$  (за  $m = 2n - 1$  важи  $m!! = (2n - 1)!! = (2n - 1) \cdot (2n - 3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ).

2. У скупу реалних бројева решити једначину

$$x^2 - 4x + 10 = \sqrt{x^3 - 4} + \sqrt{3x^3 - 20} + 2\sqrt{9 - x^3}.$$

3. Дата је табла димензија  $2023 \times 2024$ . Аца и Бранко играју следећу игру: Најпре Аца бира поље табле и поставља скакача, а потом наизменично одигравају потез скакачем (у складу са шаховским правилима), при чему у сваком потезу померају скакача на неко од поља табле на које скакач до тада није стао (током игре не могу померити скакача на почетно поље - поље на које је Аца, у почетку игре, поставио скакача). Игру губи играч који не може да одигра потез. Уколико Бранко игра први (након што је Аца поставио скакача), који играч има победничку стратегију?

4. Одредити полином  $P$  са целобројним коефицијентима, такав да је број  $P(n) + 22^n$  дељив са 2401, за свако  $n \in \mathbb{N}$ .

5. Дат је троугао  $ABC$  са ортоцентром  $H$  и описаном кружницом  $k$ . Нека је  $A'$  тачка таква да је  $AA'$  пречник кружнице  $k$ . Нека је  $M$  средиште стране  $BC$  и нека права  $AH$  сече кружницу  $k$  у тачки  $D$ . Кружница кроз тачке  $M$  и  $A'$ , која додирује кружницу  $k$ , сече праву  $BC$ , поново, у тачки  $E$ . Доказати да се праве  $DM$  и  $A'E$  секу на кружници  $k$ .

Време за рад 180 минута.  
Сваки задатак вреди 20 поена.  
Решења задатака детаљно образложити.