

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

10. фебруар 2024.

Први разред - А категорија

1. Познато је да је број 21982145917308330487013369 једнак броју n^{13} , за неки природни број n . Одредити број n .
2. Дата је табла димензија 2023×2024 . Аца и Бранко играју следећу игру: Најпре Аца бира поље табле и поставља краљицу, а потом наизменично одигравају потез краљицом (у складу са шаховским правилима), при чему у сваком потезу померају краљицу на неко од поља табле на које краљица до тада није стала (током игре не могу померити краљицу на почетно поље - поље на које је Аца, у почетку игре, поставио краљицу). Игру губи играч који не може да одигра потез. Уколико Бранко игра први (након што је Аца поставио краљицу), који играч има победничку стратегију?
3. Са колико највише нула може да се завршава број $N = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$, где је $n \in \mathbb{N}$?
4. Нека је X средиште основике AB трапеца $ABCD$. Ако је $\sphericalangle ADX = \sphericalangle BCX$, доказати да су симетрале углова $\sphericalangle ADX$, $\sphericalangle DXC$ и $\sphericalangle XCB$ праве истог прамена, тј. да се све три секу у једној тачки или да су паралелне.
5. Бесконачни низ природних бројева a_1, a_2, a_3, \dots је дефинисан са:

$$a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,$$

за свако $n \in \mathbb{N}$. Доказати да важи

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_{2024}}{2^{2024}} < 2.$$

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.