

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

5. фебруар 2023.

Први разред - Б категорија

1. Дат је скуп $X = \{aca, konac, lopte, loto, prst\}$ и на том скупу две релације ϱ_1 и ϱ_2 , које су дефинисане захтевом:

$$\begin{aligned} x \varrho_1 y &\stackrel{\text{деф}}{\iff} \text{ речи } x \text{ и } y \text{ су исте дужине,} \\ x \varrho_2 y &\stackrel{\text{деф}}{\iff} \text{ речи } x \text{ и } y \text{ се завршавају истим словом.} \end{aligned}$$

(а) Да ли су дате релације рефлексивне, симетричне, антисиметричне и транзитивне?

(б) За сваку од релација ϱ_1 и ϱ_2 испитати да ли је релација еквиваленције, односно, да ли је иста релација поретка. У случају да је нека од њих релација еквиваленције, наћи све класе еквиваленције.

2. Одредити збир свих природних бројева n таквих да је број

$$\frac{n^2 + 2n + 51}{n^2 + 4n + 3}$$

такође природан.

3. Дат је једнакокраки троугао ABC са основицом AB . Симетрала крака BC сече праву AB у тачки D . На правој CD дата је тачка E тако да је $CE = AD$, при чему се тачка C налази између тачака D и E . Доказати да је троугао DBE једнакокраки.

4. У купеу једног старог воза налазе се две клупе, са по пет места, окренуте једна према другој. Од десет путника који треба да буду смештени у тај купе, њих четворо желе да седе у смеру кретања, док троје од њих желе да седе у смеру супротном од кретања воза. Преосталим путницима смештеним у поменути купе није важна позиција места за седење. На колико начина је могуће тих десет путника сместити у купе, тако да се нико не буну?

5. У скупу реалних бројева наћи сва решења једначине

$$\left| \frac{1}{2x} \right| + \left| \frac{2x-1}{2x} \right| + \left| \frac{2x-2}{2x} \right| = \frac{4}{3}.$$

Време за рад 180 минута.

Сваки задатак вреди 20 поена.

Решења задатака детаљно образложити.