

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

5. фебруар 2023.

Четврти разред - А категорија

1. Да ли постоји колекција $\{A_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, подскупова скупа природних бројева таквих да било која коначна подколекција те колекције има непразан пресек, али да важи

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \emptyset?$$

2. Дат је троугао ABC . Нека уписана кружница унутар троугла ABC додирује странице AB, BC и CA , редом, у тачкама F, D и E , а споља приписана кружница, која одговара страници BC , нека додирује праве AB и AC у тачкама у G и H , редом. Означимо са X другу тачку пресека кружница описаних око троуглова ABC и AEF , а са Y другу тачку пресека кружница описаних око троуглова ABC и AGH . Доказати да је $BX = CY$.

3. У граду G постоји $n \geq 8$ диско-клубова, $n \in \mathbb{N}$, од којих сваки користи светла у тачно једној од две боје, црвеној или плавој. Притом, између одређених клубова постоје директне аутобуске линије, како би грађани овог града могли с лакоћом да мењају места ноћног провода, а уз евентуално преседање, може се стићи из произвољног клуба до произвољног другог клуба. Ако је познато да је сваки диско-клуб повезан директном аутобуском линијом са тачно три друга диско-клуба, међу којима барем два користе светла црвене боје, колико највише може бити клубова са плавим светлима у том граду?

4. Нека су $a = BC, b = CA, c = AB$ дужине страница троугла ABC и нека је h_a дужина висине која одговара страници BC . Наћи највећу могућу вредност израза

$$\frac{a + h_a}{b + c}.$$

5. Одредити све природне бројеве k , такве да постоји бесконачно природних бројева n таквих да важи $\varphi(n) = \frac{n}{k}$, где је $\varphi(n)$, $n \in \mathbb{N}$, укупан број природних бројева не већих од n , који су узајамно прости са n .

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.