

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

5. фебруар 2023.

Трећи разред - А категорија

1. Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 3 & b \end{bmatrix}$. Одредити све вредности параметара a и b тако да важи матрична једнакост

$$A^2 - 5A = 2I,$$

при чему је са I означена одговарајућа јединична матрица.

2. Урош и Вељко играју игру на табли на којој су на почетку написани редом бројеви $n, n-1, n-2, \dots, 1$, при чему је $n > 2$ дати природан број. У сваком потезу Урош има право да највише k пута изабере по два суседна броја са табле и да им замени места. Вељко у сваком потезу бира један број и премешта га на произвољну позицију на табли (може га и оставити на истом месту). Урошев циљ је да на табли буду растуће записани бројеви $1, 2, \dots, n$, док је Вељков циљ да га спречи у томе. Колико најмање мора бити k тако да Урош има победничку стратегију?

3. Испитати да ли постоји прост број p , као и природни бројеви a и b , такви да важи $a^p + b^p = (2p-1)!$.

4. У оштроуглом троуглу ABC , $AB < AC$, тачке D , E и F су, редом, подножја нормала из темена A , B и C на одговарајуће странице BC , CA и AB тог троугла. Означимо са K пресек правих EF и BC , а са X тачку на дужи BC такву да је $CX - BX = 2(CD - BD)$. Доказати да кружница описана око троугла AKX садржи средиште дужи EF .

5. Ако ненегативни реални бројеви a , b и c задовољавају услов $a + b + c = 3$, наћи максималну могућу вредност израза:

- (а) $a + ab + bc + ca$;
- (б) $a + ab + bc$.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.