

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

5. фебруар 2023.

Први разред - А категорија

1. Дат је скуп $X = \{aca, konac, lopte, loto, prst\}$ и на том скупу две релације ϱ_1 и ϱ_2 , које су дефинисане захтевом:

$$\begin{array}{l} x \varrho_1 y \stackrel{\text{деф}}{\iff} \text{ речи } x \text{ и } y \text{ су исте дужине,} \\ x \varrho_2 y \stackrel{\text{деф}}{\iff} \text{ речи } x \text{ и } y \text{ се завршавају истим словом.} \end{array}$$

(а) Да ли су дате релације рефлексивне, симетричне, антисиметричне и транзитивне?

(б) За сваку од релација ϱ_1 и ϱ_2 испитати да ли је релација еквиваленције, односно, да ли је иста релација поретка. У случају да је нека од њих релација еквиваленције, наћи све класе еквиваленције.

2. Дат је полином P са целобројним коефицијентима за који важи $P(P(2023) + 2023) = 1$. Које све вредности може узети број $P(2023)$?

3. Дат је троугао ABC . Тангенте на описану кружницу тог троугла, конструисане у тачкама B и C , секу се у тачки X . Нека кружница описана око троугла ABX сече праву BC у тачки P и нека кружница описана око троугла ACX сече праву BC у тачки Q . Доказати да се тангенте конструисане у тачкама P и Q на описану кружницу троугла XPQ секу на правој AX .

4. Наћи све природне бројеве n такве да је број $n^2 + 7n + 2$ производ неколико (барем два) узастопних природних бројева.

5. За таблу димензија $m \times n$ (m и n су природни бројеви) њеним скелетом ћемо звати скуп свих дужи које су ивице барем једног од mn јединичних квадрата од којих се иста састоји. Одредити све уређене парове природних бројева (m, n) , такве да се скелет табле $m \times n$ може поплатити фигуром која се састоји од две нормалне јединичне дужи које имају једно заједничко теме.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.