

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

05.02.2022.

Четврти разред – А категорија

1. Нека је  $ABCD$  четвороугао са правим углом код темена  $B$  и оштрим углом код темена  $D$ . Нека је  $M$  средиште дужи  $AB$ , а  $E$  пресечна тачка нормале на  $AB$  у тачки  $A$  и нормале на  $AD$  у тачки  $M$ . Ако је  $F$  пресечна тачка правих  $EC$  и  $MD$  и ако је права  $MC$  нормална на праву  $BD$ , доказати да је  $\sphericalangle BFA = \sphericalangle EMC$ .
2. Колико има тројки  $(a, b, c)$  реалних бројева, таквих да квадратна функција  $f(x) = ax^2 + bx + c$  задовољава  $f(a) = 2abc$  и  $f(b) = f(c) = abc$ ?
3. Број  $n$  добијен је множењем броја 2022 и природног броја чији декадни запис садржи само цифре 0 и 2. Одредити које цифре у декадном запису може имати број  $n$ .
4. Одредити све природне бројеве  $n$  такве да важи

$$\log_{n+1}(n^2 + 3n) + \log_{3n}(n^2 - 6) = \log_{2(n-1)}(n^3 + 9).$$

5. У равни се налази скуп  $\mathfrak{T}$ , који се састоји од 25 тачака, међу којима су  $A$  и  $B$ ,  $A \neq B$ , тако да никоје три тачке из  $\mathfrak{T}$  нису колинеарне. Нека је  $\mathfrak{D}$  скуп дужи који задовољава следеће:
  - крајње тачке сваке дужи из  $\mathfrak{D}$  су неке две различите тачке из  $\mathfrak{T}$ ;
  - свака тачка из  $\mathfrak{T}$  различита од  $A$  и  $B$  је крајња тачка највише две дужи из  $\mathfrak{D}$ ;
  - за сваке две тачке из  $\mathfrak{T}$  постоји изломљена линија састављена од дужи из  $\mathfrak{D}$  која их повезује;
  - укупан број троуглова који се може формирати од дужи из  $\mathfrak{D}$  једнак је 9;
  - укупан број затворених изломљених линија које се састоје од 4 дужи из  $\mathfrak{D}$  једнак је 9.(а) Доказати да скупу  $\mathfrak{D}$  припада дуж чије су крајње тачке  $A$  и  $B$ .  
(б) Одредити број тачака из  $\mathfrak{T}$  које су спојене и са тачком  $A$  и са тачком  $B$  дужима из скупа  $\mathfrak{D}$ .