Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

05.02.2022.

Трећи разред – А категорија

1. Одредити све природне бројеве $n \geqslant 3$ за које је могуће поделити скуп

$$\{2! - 1, 3! - 1, \ldots, n! - 1\}$$

на два подскупа, тако да су збирови елемената у та два подскупа једнаки.

2. Ако су m, n непарни природни бројеви, доказати да решења једначине

$$x^2 + 2mx + 2n = 0$$

нису рационални бројеви.

3. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \ldots & + & 2021x_{2021} & + & 2022x_{2022} & = & 1, \\
x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & \ldots & + & 2021x_{2022} & + & 2022x_1 & = & 2, \\
 & & & & & & & & & & & \vdots & \\
x_{2022} & + & 2x_1 & + & 3x_2 & + & \ldots & + & 2021x_{2020} & + & 2022x_{2021} & = & 2022.
\end{array}$$

4. Нека је ABC оштроугли троугао, чији је центар уписаног круга S, а ортоцентар H. Нека су D, E, F додирне тачке уписаног круга са BC, CA, AB, редом, а Y средиште лука BC којем припада тачка H описаног круга троугла BCH. Нека се нормала из B на DE и нормала из C на FD секу у тачки X. Доказати да је $XY \perp EF$.

5. Нека је S коначан скуп позитивних реалних бројева чији је збир s. Елемент $r \in S$ назива се *раздвајач* ако се скуп $S \setminus \{r\}$ може поделити на два скупа A и B ($A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = S \setminus \{r\}$), тако да је збир свих елемената у било ком од A и B не већи од $\frac{s}{2}$. Доказати да је збир свих раздвајача не мањи од $\frac{s}{2}$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.