

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

05.02.2022.

Други разред – А категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}.$$

2. У троуглу  $ABC$  угао код темена  $A$  једнак је  $90^\circ$ , а угао код темена  $C$  једнак је  $70^\circ$ . Нека је  $P$  тачка дужи  $AB$  таква да је  $\sphericalangle ACP = 30^\circ$ , а  $Q$  тачка дужи  $AC$  таква да је  $\sphericalangle CPQ = 20^\circ$ . Доказати да је права  $BQ$  симетрала угла код темена  $B$  троугла  $ABC$ .

3. Одредити све природне бројеве  $m$  и  $n$  такве да важи

$$m^{2022} + 2 = n^{m-1}.$$

4. Нека су  $a$  и  $b$  реални бројеви. Доказати да барем једна од једначина

$$x^2 + 2ax + b = 0, \quad ax^2 + 2bx + 1 = 0, \quad bx^2 + 2x + a = 0,$$

има решења у скупу реалних бројева.

5. Одредити све природне бројеве  $n \geq 3$  за које постоји затворена изломљена линија која се састоји од  $n$  дужи, тако да се сваке две дужи секу и тако да су свака три темена те изломљене линије неколинеарна. (Две дужи се секу ако имају макар једну заједничку тачку; та тачка може бити и крајња тачка дужи.)