

Државно такмичење из математике

осми разред: 2022. године

1. Нека су x, y, z реални бројеви, различити од 0, такви да важи $x + y + z = 2025$ и $xy + yz + zx = xyz$. Одреди вредност израза $\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y}$.
2. а) Одреди које остатке при дељењу са 11 дају бројеви облика n^5 где је n природан број.
б) Докажи да једначина $x^5 + y^5 + z^5 = 2022^{2022}$ нема решења у скупу природних бројева.
3. Нека је дата правилна тространа призма $ABCA'B'C'$. Нека је D тачка на страници AA' , таква да је $AD : DA' = 4 : 1$. Нека су E и F тачке осносиметричне теменима B' и C' у односу на праву BC . У ком односу раван DEF дели запремину призме.
4. Дате су тачке $A(0, 4)$ и $B(-1, 5)$. На правој $y = -x$ одреди тачку P тако да збир дужина дужи AP и BP буде минималан.
5. Седморица гусара су поделили извесну количину златника. Делили су тако да је свако узимао онолико колики је збир цифара броја златника пре него што је он узимао. Свако је узимао тачно два пута и на крају није остао ни један златник. Сви су добили исту количину златника, изузев главног гусара који је добио више.
 - а) Колико златника је било?
 - б) Колико златника је добио главни гусар, а колико остали?
 - в) Који је по реду узимања био главни гусар?