

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

6. фебруар 2021.

Четврти разред – А категорија

1. Да ли постоји природан број  $N$  такав да се сваки природан број  $n \geq N$  може представити у облику збира простог броја и квадрата сложеног броја?

2. Постоји ли строго растући геометријски низ  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  за који важи

$$S_{2021} = 20 \cdot S_{21},$$

где за свако  $n \in \mathbb{N}$  означавамо  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ?

3. Одредити највећу могућу вредност детерминанте матрице  $4 \times 4$  чији је сваки елемент једнак 1 или  $-1$ .

4. У конвексном четвороуглу  $ABCD$  важи  $\sphericalangle C = \sphericalangle D = 120^\circ$ . Конструисани су једнакостранични троуглови  $ACE$  и  $BDF$ , при чему су тачке  $E$  и  $D$  са исте стране праве  $AC$ , а  $F$  и  $C$  са исте стране праве  $BD$ . Праве  $AE$  и  $DF$  секу се у тачки  $X$ , а праве  $CE$  и  $BF$  у тачки  $Y$ . Доказати да праве  $AC$ ,  $BD$  и  $XY$  имају заједничку тачку.

5. Дати су природни бројеви  $n$  и  $k < \frac{n}{2}$ . У низ је поређано  $n$  кугли обележених бројевима од 1 до  $n$ , од којих су неке (бар једна) од сребра, а друге од олова. Све сребрне кугле су идентичне, све оловне такође, али оловна кугла је мало тежа од сребрне. Познато нам је да има највише  $d$  сребрних кугли, али без помагала не можемо да их препознамо. Од помагала имамо теразије са два таса које могу само да одреде да ли је маса на левом тасу већа, мања или једнака оној на десном. Дозвољено нам је да одаберемо низове  $A$  и  $B$  од по  $k$  узастопних кугли и на тасове поставимо скупове  $A \setminus B$  и  $B \setminus A$ . За које највеће  $d \in \mathbb{N}$  увек можемо да у коначном броју мерења идентификујемо све сребрне кугле?

Време за рад: 180 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.  
Сваки задатак вреди 20 бодова.