

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

6. фебруар 2021.

Трећи разред – А категорија

1. Доказати да постоји цифра која се у декадном запису броја $5 \cdot 2^{2021}$ појављује бар 62 пута.
Напомена. $0,301 \leq \log_{10} 2 \leq 0,302$.

2. Наћи све тројке (x, y, z) реалних бројева који задовољавају једнакост

$$\frac{2^{x^2}}{(2y)^2} + \frac{2^{y^2}}{(2z)^2} + \frac{2^{z^2}}{(2x)^2} = \frac{3}{2}.$$

3. Дат је природан број n . Фамилија \mathcal{F} подскупова скупа \mathbb{N} има следећа својства:

(i) за свако $X \in \mathcal{F}$ важи $|X| = n$ или $|X| = n + 1$;

(ii) кад год су $A, B \subset \mathbb{N}$ подскупови такви да је $|A| = n$, $|B| = n + 1$ и $A \subset B$, тачно један од њих припада фамилији \mathcal{F} .

Доказати да се, за неко $m \in \{n, n + 1\}$, \mathcal{F} поклапа са фамилијом свих m -точланих подскупова скупа \mathbb{N} .

4. Тачка O је центар паралелограма $ABCD$. Уписани круг ω_1 троугла ABC додирује странице AB и AC редом у тачкама P и Q , а уписани круг ω_2 троугла ABD додирује странице AB и BD редом у тачкама R и S . Праве PQ и RS се секу у тачки X . Доказати да је права OX нормална на праву која спаја центре кругова ω_1 и ω_2 .

5. Може ли се круг поделити на међусобно подударне делове тако да бар један део не садржи центар круга (у унутрашњости или на граници)?

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.