

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

6. фебруар 2021.

Други разред – А категорија

1. Квадратна функција $f(x) = ax^2 + bx + c$ са реалним коефицијентима задовољава услов $a + c + 1 = b$. Ако она нема реалних нула, доказати да је $b < \frac{1}{2}$.

2. Комплексни бројеви a и b су такви да је количник

$$\frac{a^2 + b^2}{ab}$$

реалан број из интервала $(-2, 2)$. Доказати да је $|a| = |b|$.

3. У кутији се налази 25 куглица, означених бројевима $1, 2, \dots, 25$. Алимпије и Вартоломеј наизменично стављају по једну куглицу из кутије на сто, при чему Алимпије игра први. Играч после чијег потеза је збир бројева извучених куглица дељив са 3, или који узме последњу куглицу из кутије, губи. Доказати да, ма како Вартоломеј играо, Алимпије може да победи.

4. У оштроуглом троуглу ABC тачка O је центар описаног круга, а P тачка са супротне стране праве BO у односу на тачку A таква да је $AO = AP$ и $AP \perp BO$. Тачка Q је средиште дужи OP , а R тачка са супротне стране праве AB у односу на C таква да је ARB једнакоккрако-правоугли троугао са правим углом у тачки R . Доказати да је $PR = \sqrt{2} \cdot BQ$.

5. Наћи све тројке природних бројева (a, b, c) такве да су сва три броја $2a + b$, $2b + c$ и $2c + a$ степени броја 3.

(*Стејен* броја 3 је било који број облика 3^n , где је $n \geq 0$ цео број.)

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.