Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

6. фебруар 2021.

Први разред – А категорија

1. На шаховском турниру је учествовало 8 такмичара и свако је играо са сваким од преосталих учесника. За сваку победу добија се 1 поен, за пораз 0 поена, а за реми 0,5 поена. На крају турнира свака два учесника су имала различите бројеве поена, а другопласирани такмичар је имао поена колико и четворица последњепласираних заједно. Који је био исход партије трећепласираног и седмопласираног шахисте?

2. Дати су непразни скупови A и B од којих ниједан није подскуп другог. За природан број n посматрајмо једнакост

$$\underbrace{A \setminus (B \setminus (A \setminus (B \setminus \cdots)))}_{n \text{ скупова}} = \underbrace{A \triangle (B \triangle (A \triangle (B \triangle \cdots)))}_{n \text{ скупова}}\ ?$$

(а) Испитати да ли је ова једнакост тачна за $n = 5$.

(б) За које природне бројеве n је она тачна?

(Са $X \triangle Y$ означена је *симетрична разлика* скупова X и Y, тј. $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$.)

3. Дати су угао xOy и тачке A, B и C на краку Ox тако да је $OA = 3$, $OB = 4$ и $OC = 6$. Подножје нормале из тачке B на полуправу Oy је тачка D. Доказати да је $CD = 2AD$.

4. Дато је $n \geqslant 3$ узастопних непарних троцифрених бројева. Доказати да се ових n бројева могу поређати у низ $b_1, b_2, \ldots, b_n$ тако да број

$$\overline{b_1 b_2 \ldots b_n},$$

добијен записивањем ових бројева једног за другим у декадном запису, буде сложен.

5. Поља квадратне табле $n \times n$ треба обојити са n различитих боја тако да свака врста и свака колона садрже свих n боја. Наћи најмањи и највећи могући број парова истобојних поља која имају заједничко теме

(а) ако је $n = 4$;

(б) ако је $n = 5$.

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.