

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

18. јануар 2020.

Трећи разред – Б категорија

1. Ако за неки коначан скуп A важи $|A\Delta\mathcal{P}(A)| = 1$, доказати да је $|A| \leq 1$.
(Са $X\Delta Y$ означена је *симетрична разлика* скупова X и Y , тј. $X\Delta Y = (X\setminus Y) \cup (Y\setminus X)$.)
2. Претпоставимо да је x природан број такав да бројеви x и x^2 имају исти k -тоцифрени завршетак. Доказати да тада сви степени броја x имају исти k -тоцифрени завршетак.

3. Решити једначину:

$$4 \sin^3 x = \sin x + \cos x.$$

4. У једној школи се одржава турнир у стоном тенису. У сваком кругу ученици су распоређени у парове; сваки пар игра меч и победник пролази у следећи круг (нема нерешених мечева). Ако у неком кругу има непаран број ученика, један жребом изабран ученик иде у наредни круг без борбе. Када остане само један ученик, он се проглашава победником и турнир се завршава.

Колико ће укупно мечева бити одиграно, ако је учествовало:

- (а) 2020 ученика? (б) n ученика, где је n произвољан природан број?
5. Дат је једнакокраки трапез $ABCD$ са основицом AB и $AB : CD = 2 : 1$. Тачка M је средиште дијагонале AC , а тачка N пресек праве BM и дужи AD . Доказати да је

$$P(ABM) : P(NMCD) = 3 : 2.$$

($P(\mathcal{A})$ означава површину многоугла \mathcal{A} .)

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.