

# Државно такмичење из математике

## осми разред: 2020. године

1. Одреди последње две цифре броја  $7^{7^7}$ .
2. Нека су  $x, y, z$  и  $\frac{y+x\sqrt{2}}{z+y\sqrt{2}}$  природни бројеви. Одреди најмању могућу вредност количника  $\frac{x+z}{y}$ .
3. Дата је тространа пирамида  $ABCD$  чије су дужине ивица  $AB = 5$  см,  $AC = 3$  см,  $BC = 4$  см,  $BD = 4$  см,  $AD = 3$  см,  $CD = \frac{12}{5}\sqrt{2}$  см. Раван, која садржи праву  $AB$  и нормална је на  $CD$ , сече дуж  $CD$  у тачки  $M$ . Раван, која садржи праву  $CD$  и нормална је на  $AB$ , сече дуж  $AB$  у тачки  $N$ . Израчунај дужину дужи  $MN$ .
4. Нека је  $ABC$  троугао са тупим углом у темену  $A$  и  $D$  подножје висине троугла из темена  $A$ . Кружница  $k$  са центром  $D$ , која садржи тачку  $A$ , сече праве  $AB$  и  $AC$ , редом у тачкама  $M$  и  $N$ . Докажи да је  $AB \cdot AM = AC \cdot AN$ .
5. Одреди све природне бројеве  $n$  за које је могуће неке од бројева из скупа  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  повећати за 1, а све остале смањити за 1, тако да њихов производ остане непромењен.