

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

19. јануар 2019.

Четврти разред – А категорија

1. У тетраедру $ABCD$ висина из темена D пада у унутрашњост $\triangle ABC$, а пљосни $\triangle DAB$, $\triangle DAC$ и $\triangle DBC$ заклапају с пљосни $\triangle ABC$ међусобно подударне диједарске углове. Ако важи $P(\triangle ABC) = 21$, $P(\triangle DAB) = 15$, $P(\triangle DAC) = 13$ и $P(\triangle DBC) = 14$, израчунати запремину тетраедра $ABCD$.

2. Означимо број цифара броја n у декадном запису са $\text{brc}(n)$. Да ли постоји реална константа c таква да за сваки природан број n важи:

$$\text{brc}(1) + \text{brc}(2) + \dots + \text{brc}(n) < cn \quad ?$$

3. У некој земљи постоји 101 град. Свака два града су повезана највише једном аутобуском линијом, при чему су све аутобуске линије једносмерне. Из сваког града излази тачно 25 линија и у сваки улази тачно 25. Доказати да се из сваког града може стићи (уз преседања ако је потребно) у сваки други.

4. Дат је петоугао $ABCDE$ у ком важи $CD = AB + AE$. Нека симетрала $\angle BAE$ сече BE у тачки P , нека је Q тачка на CD таква да важи $CQ = AB$, и нека су X и Y средишта дужи BC и DE , респективно. Нека је T тежиште у $\triangle APQ$ и нека YT сече AX у тачки Z . Наћи $\frac{AZ}{ZX}$ у функцији од AB и AE .

5. Нека су a, b, c, d ненегативни реални бројеви за које важи $a + b + c + d = 1$. Означимо

$$M = \frac{b^2 + c^2 + d^2 - bc - cd - db}{3}.$$

Доказати неједнакост

$$\sqrt{a + M} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} \leq 2.$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.