

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

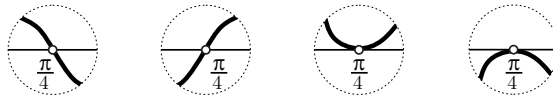
19. јануар 2019.

Трећи разред – А категорија

1. На једном од исечака доле приказан је део x -осе и графика функције

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - 2}{4x^2 - 7x + 3}.$$

Који је то исечак?



2. У $\triangle ABC$ тачка D је средиште странице BC . Тачка P на дужи AD је таква да важи $CP = AB$. Права CP сече дуж AB у тачки Q . Доказати: $AQ = PQ$.
3. Нека су k , n и d природни бројеви. Означимо са A_d број k -торки (a_1, a_2, \dots, a_k) целих бројева таквих да важи

$$n \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k \geq 0 \quad \text{и} \quad a_1 + a_2 + \dots + a_k = d.$$

Означимо са B_d број k -торки (b_1, b_2, \dots, b_k) ненегативних целих бројева таквих да важи

$$b_1 + b_2 + \dots + b_k \leq n \quad \text{и} \quad b_1 + 2b_2 + \dots + kb_k = d.$$

Доказати:

$$A_d = B_d = B_{kn-d}.$$

4. Лати су различити природни бројеви a_1, a_2, \dots, a_{100} . За $i = 1, 2, \dots, 100$, број b_i је добијен додавањем броју a_i највећег заједничког делиоца осталих 99 бројева. Колико најмање међу бројевима b_i може бити различитих?
5. а) Доказати да постоји бесконачно много природних бројева који се не могу представити у облику

$$p^q + q^r$$

за неке просте бројеве p , q и r .

- б) Доказати да постоји само коначно много природних бројева који се не могу представити у облику

$$p_1^{p_2} + p_2^{p_3} + \dots + p_{i-1}^{p_i}$$

за неки природан број i , $i > 1$, и неке просте бројеве p_1, p_2, \dots, p_i .

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.