

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

19. јануар 2019.

Први разред – А категорија

1. Нека су AA_0 , BB_0 и CC_0 висине $\triangle ABC$, а H његов ортоцентар. Ако су M и N средишта дужи AA_0 и CC_0 , доказати да тачке M , N , B_0 и H леже на истој кружности.
2. Наћи све парове реалних бројева a и b такве да за све реалне бројеве x и y важи једнакост
$$\lfloor ax + by \rfloor + \lfloor bx + ay \rfloor = (a + b)\lfloor x + y \rfloor.$$
(За реалан број t , са $\lfloor t \rfloor$ означавамо највећи цео број који није већи од t .)
3. Доказати да се у правилном осмоуглу $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ дијагонале A_1A_6 , A_3A_7 и A_5A_8 секу у једној тачки.
4. Наћи све природне бројеве n такве да су $n - 4$, $2n + 2$ и $4n + 1$ потпуни кубови.
5. У популарној игри „Миноговац“ на неким пољима табле $a \times b$ ($a, b \in \mathbb{N}$) налазе се мине, а на сваком преосталом пољу је уписан број њему суседних поља на којима су мине (под суседним пољима подразумевамо поља која имају бар једно заједничко теме). Испитати да ли постоје бројеви a и b и распоред мина на табли $a \times b$ такви да тачно 2019 поља немају мину и да је на свима њима уписан број:
 - a) 3;
 - b) 4;
 - c) 7.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.