Државно такмичење из математике

осми разред:

2018.

1. Правоугаона таблица 29×41 попуњена је природним бројевима $1, 2, \ldots, 29 \cdot 41$ најпре тако што су у првом реду, почевши од доњег левог угла, редом записани бројеви $1, 2, \ldots, 29$, у другом реду бројеви $30, 31, \ldots, 58$ и тако даље до краја. Затим је иста таблица попуњена истим бројевима тако што су у првој колони, такође почевши од доњег левог угла, редом записани бројеви $1, 2, \ldots, 41$, у другој колони бројеви $42, 43, \ldots, 82$ и тако даље до краја. Колико има поља таблице у којима је при оба попуњавања био записан исти број?

2. Ако за реалне бројеве x, y, z важи $x + y + z = 8$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 32$, одреди највећу могућу вредност броја z.

3. Бочна страна OAB тростране пирамиде $OABC$ је једнакостранични троугао странице $AB = 6\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. Ивице CA, CB и CO су међусобно једнаке. Висина пирамиде је $OO_1 = 4{,}5\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. Израчунај површину пресека пирамиде $OABC$ са равни COO_1.

4. Кружнице k_1 и k_2 секу се у тачкама A и B. Нека је CD пречник кружнице k_1, при чему је тачка C изван кружнице k_2, а тачка D унутар ње. Праве AD и BD редом секу кружницу k_2 још у тачкама M и N, а праве CD и MN се секу у тачки E. Докажи да је $AC \cdot BD \cdot EN = AD \cdot BC \cdot EM$.

5. На колико начина је могуће обојити све једноцифрене природне бројеве, бојећи сваки број једном од три боје – плавом, белом или црвеном, а да притом било која два броја чији је збир непаран не буду обојена истом бојом?